车辆横向控制

Created	@June 18, 2022 9:18 AM
Tags	
Author	欧亚明 & 毕志海

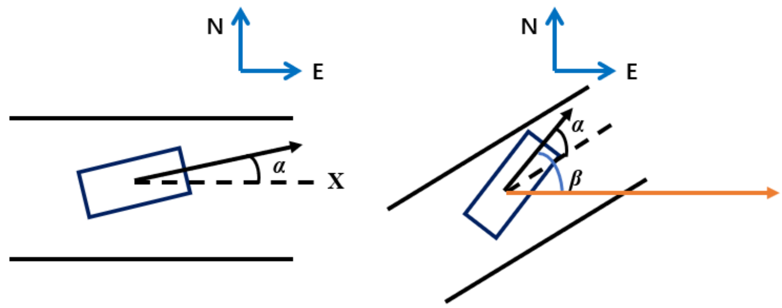
0. 基础知识

0.1 车辆模型

- 平面运动，因此描述车量状态的量有三个(x, y, ψ),即坐标和航向角。
- **主要假设**是A点的速度向量和B点的速度向量的方向和A、B轮的朝向是保持一致的，也就是忽略了侧滑的因素，轮子只有切向速度，没有法向速度。这样的假设再低速的情况下也算是合理。因为轮胎的侧向力是：

$$F_l = \frac{mV^2}{R}$$

当速度较小时，侧向力很小，可以忽略。记住建模的目的始终是将复杂的问题简单化、数学化，没有说复杂的模型的更好，要在模型的复杂度和模型精度之间做好权衡。



航向角是汽车朝向和正东方向的夹角。

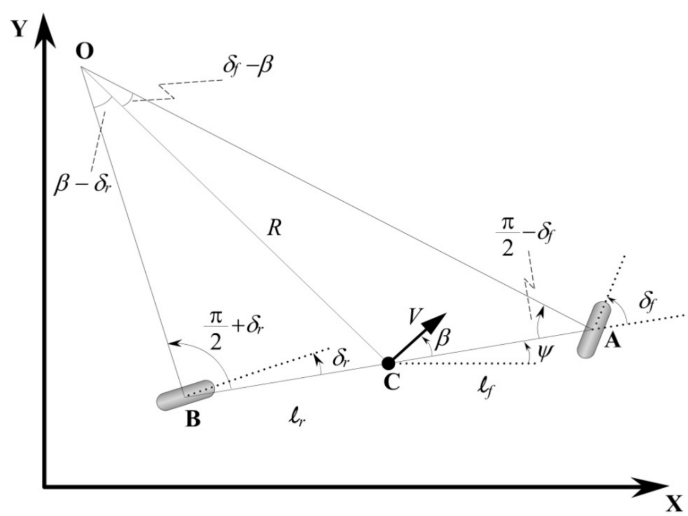


Figure 2-3. Kinematics of lateral vehicle motion

符号	定义	符号	定义
A	前轮中心	B	后轮中心
C	车辆质心	O	转向圆心
V	质心车速	R	转向半径
ℓ_r	后悬长度	ℓ_f	前悬长度
β	滑移角	ψ	航向角
δ_r	后轮偏角	δ_f	前轮偏角

车辆长度 $L = l_r + l_f$. O点是瞬时转动中心，定义为A和B的法线的交点。汽车路径的转弯半径R定义为OC。汽车质心的速度垂直于OC。速度和线段AB的夹角定义为汽车的滑移角β. 汽车的Course angle 定义为$\gamma = \psi + \beta$. 对于三角形OCA来说，有以下关系：

$$\frac{\sin\left(\delta_f-\beta\right)}{\ell_f}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta_f\right)}{R} \quad (0.1)$$

对于三角形OBC来说：

$$\frac{\sin\left(\beta-\delta_r\right)}{\ell_r}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta_r\right)}{R} \quad (0.2)$$

对（0.1）展开得（0.3），两边同乘$\frac{\ell_f}{cos(\delta_f)}$, 对（0.2）展开得（0.4），两边同乘$\frac{\ell_r}{cos(\delta_r)}$,得到：

$$\tan\left(\delta_f\right)\cos(\beta)-\sin(\beta)=\frac{\ell_f}{R} \quad (0.5)$$

$$\sin(\beta)-\tan\left(\delta_r\right)\cos(\beta)=\frac{\ell_r}{R} \quad (0.6)$$

（0.5）和（0.6）相加得：

$$\left\{\tan\left(\delta_f\right)-\tan\left(\delta_r\right)\right\}\cos(\beta)=\frac{\ell_f+\ell_r}{R} \quad (0.7)$$

假设汽车的速度较慢，半径R变化得很慢，这时可以认为汽车航向角得变化率等于汽车的角速度：

$$\dot{\psi}=\frac{V}{R} \quad (0.8)$$

根据(0.8)，（0.7）可以改写为：

$$\dot{\psi}=\frac{V\cos(\beta)}{\ell_f+\ell_r}\left(\tan\left(\delta_f\right)-\tan\left(\delta_r\right)\right) \quad (0.9)$$

所有状态量的方程可以写为：

$$\begin{aligned}
&\dot{X}=V\cos(\psi+\beta) \quad (0.10)\\
&\dot{Y}=V\sin(\psi+\beta) \quad (0.11)\\
&\dot{\psi}=\tfrac{V\cos(\beta)}{\ell_f+\ell_r}\left(\tan\left(\delta_f\right)-\tan\left(\delta_r\right)\right) \quad (0.12)
\end{aligned}$$

模型有三个输入：δ_f,δ_r,V. 速度V是外部变量，可以是时变的函数，也可从纵向汽车模型中获取。

滑移角β可以联合式子（0.5）和（0.6）得到：

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\ell_f\tan\delta_r+\ell_r\tan\delta_f}{\ell_f+\ell_r}\right) \quad (0.13)$$

以上只是简化的模型，我们认为转弯时前轮的角度相同。其实在转弯是绕瞬时转动中心运动的过程，两个轮子的转角肯定是不相同的（相同的话两法线平行，没有瞬时转动中心的存在，这样的转弯肯定是不流畅的），现在可以看看两角度的差值大小和什么因素有关，以反映在什么情况下，上面的运动学简化模型可能存在较大误差。

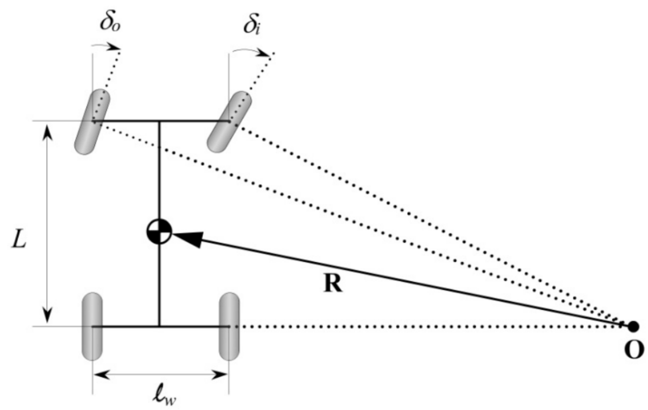


Figure 2-4. Ackerman turning geometry

假设瞬时转动半径$R \gg L$, 且β很小。这个模型里$\delta_r = 0$，β很小,R比较大，所以其实δ_f也是一个小量，那么我们可以把（0.12）近似为：

$$\frac{\dot{\psi}}{V} \approx \frac{1}{R} = \frac{\delta}{L} \quad (0.14)$$

其中$\delta = (\delta_0 + \delta_1)/2$, 又因为$R \gg \ell_w$, 两个转角可以表示为：

$$\delta_o = \frac{L}{R+\frac{\ell_w}{2}} \quad (0.15)$$
$$\delta_i = \frac{L}{R-\frac{\ell_w}{2}} \quad (0.16)$$

所以前轮两转角的偏差为：

$$\delta_i - \delta_o = \frac{L}{R^2}\ell_w = \delta^2 \frac{\ell_w}{\mathrm{L}}(0.18)$$

可以看出其实和δ相关，并且$\delta = L/R$, 转弯半径越小，两轮的转角偏差越大，也就是说转大弯时，以上的一些假设可能不成立，模型误差较大。实际上这个问题可能在机械结构设计的时候就考虑进去了，具体的也不是很懂，可能可以设计一个传动机构，使得两轮保持基本不变的转角差，保证转弯的平滑性。

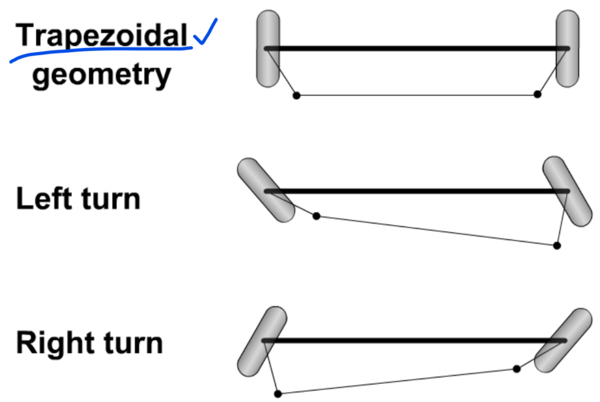


Figure 2-5. Differential steer from a trapezoidal tie-rod arrangement

0.2 车辆横向动力学模型

前面的运动学模型都是假设车辆在低速行驶的情况下成立的，到了高速，轮子就要考虑侧向滑移，速度方向不再和轮子朝向一样了，这时候需要上动力学模型。

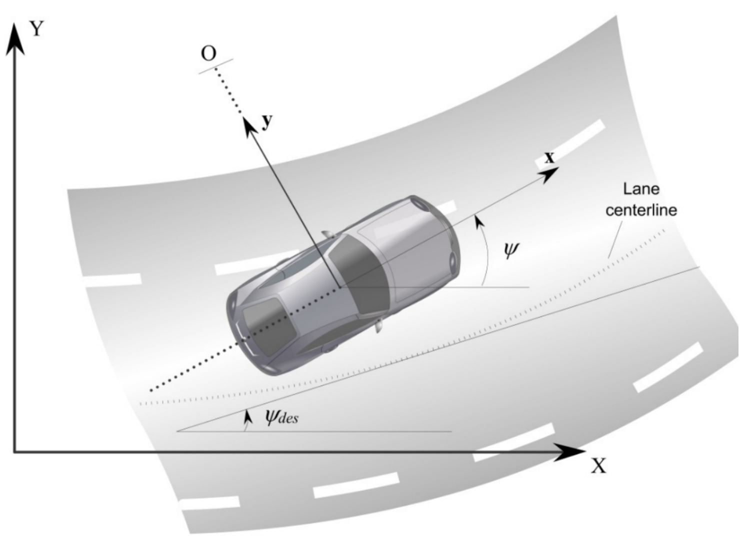


Figure 2-6. Lateral vehicle dynamics

图展示的是2自由度的模型，侧向位置y和车辆偏航角ψ。y的测量是从车辆的横轴到瞬时转动中心O点的距离。ψ角是车辆的X轴和全局坐标的X轴之间的夹角。质心的纵向速度表示为V_x。

忽略斜坡的影响，用牛顿第二定律建模：

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (0.19)$$

其中a_y是沿着执行y轴方向的车辆的惯性加速度，F_{yf}和F_{yr}分别是前后轮的轮胎侧向力。a_y由两部分组成，分别是沿着y轴运动的加速度和向心加速度：

$$a_y = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} \quad (0.20)$$

因此由上面两个式子可以得到力平衡方程：

$$m(\ddot{y} + \dot{\psi} V_x) = F_{yf} + F_{yr} \quad (0.21)$$

Z轴的力矩平衡方程为：

$$I_z \ddot{\psi} = \ell_f F_{yf} - \ell_r F_{yr} \quad (0.22)$$

这里比较迷惑的就是，这个轮胎的侧向力怎么得到呢？通过实验发现，在滑动角是小角度的时候，轮胎侧向力和滑动角是成比例关系的。这里的滑动角和运动学模型的滑移角定义还不一样（英文都是slip angle）。滑动角定义为轮胎的朝向和轮子的速度方向之间的夹角

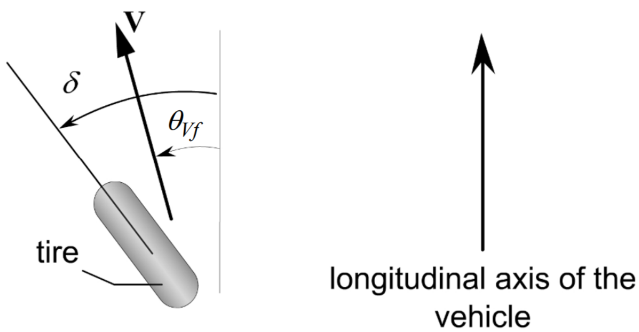


Figure 2-7. Tire slip-angle

也就是前轮的滑动角定义为：

$$\alpha_f = \delta - \theta_{Vf} \quad (0.23)$$

因为这里的车辆模型，应该是假设后轮不能转动的，因此，后轮的滑动角为：

$$\alpha_r = 0 - \theta_{Vr} = -\theta_{Vr} \quad (0.24)$$

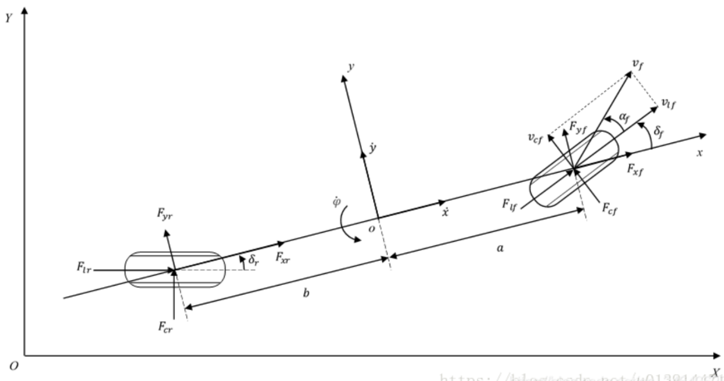
那么两个轮胎的侧向力就直接被定义成：

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{Vf}) = 2C_{\alpha f}\alpha_f \quad (0.25)$$
$$F_{yr} = 2C_{\alpha r}(-\theta_{Vr}) = 2C_{\alpha r}\alpha_r \quad (0.26)$$

其中，系数2是因为前后各两个轮，C是比例常数，车辆术语中叫做侧偏刚度。对于前后轮两个θ是怎么求的呢？

$$\tan(\theta_{Vf}) = \frac{V_y + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (0.27)$$
$$\tan(\theta_{V_r}) = \frac{V_y - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (0.28)$$

为什么是这样呢？直观上去想，ψ是沿着Z轴方向的转角，满足右手定则，那么前轮的yaw方向和y轴的速度方向一致，那么后轮就是和y轴速度相反了。从别人的blog里找到这张图可以理解得好一点。



小角度的时候，假设$V_y = \dot{y}$,那么两个θ角可以直接求出来：

$$\theta_{Vf} = \frac{\dot{y}+\ell_f\dot{\psi}}{V_x} \quad (0.29)$$
$$\theta_{Vr} = \frac{\dot{y}-\ell_r\dot{\psi}}{V_x} \quad (0.30)$$

代入方程(0.25),(0.26),(0.29)以及(0.30)到方程(0.21)和(0.22)中，得到系统的状态空间模型为：

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{y}\\ \ddot{y}\\ \dot{\psi}\\ \ddot{\psi}\end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mV_x} & 0 & -V_x-\frac{2C_{\alpha f}\ell_f-2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\ell_f C_{\alpha f}-2\ell_r C_{\alpha r}}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2\ell_f^2 C_{\alpha f}+2\ell_r^2 C_{\alpha r}}{I_z V_x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2\ell_f C_{\alpha f}}{I_z}\end{array}\right\}\delta \quad (0.31)$$

0.3 针对路面误差的动力学模型

上面的状态空间方程状态量是Y轴的速度、加速度以及Z轴的速度和加速度，但是在车辆横向控制的任务中，我们需要关心的状态量是车辆质心距离中心点的距离误差、速度以及车辆航向角的误差和速度。所以需要对（0.31）的状态方程转化一下。定义以下状态量：

- e_1, 是车的质心和道路中心线的距离（y）
- e_2, 是车辆针对于道路的航向角误差(ψ)

e考虑车辆的纵向速度V_x恒定，转弯半径R很大，因此之前一些小角度近似的假设都仍然成立。这里定义了汽车航向角期望的变化速率：

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{V_x}{R} \quad (0.38)$$

汽车期望的加速度可以写为：

$$\frac{V_x^2}{R} = V_x\dot{\psi}_{des} \quad (0.39)$$

关于e_1和e_2的定义，书上给出的是：

$$\ddot{e}_1 = \left(\ddot{y} + V_x\dot{\psi}\right) - \frac{V_x^2}{R} = \ddot{y} + V_x\left(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}\right) \quad (0.40)$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des} \quad (0.41)$$

e_2的定义好理解，但是e_1的定义呢？Y轴的加速度 + 向心加速度 - 期望的加速度，合理。如果V_x是一个定值的情况下，那么式子（0.40）积分可以得到:

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x(\psi - \psi_{des}) \quad (0.42)$$

如果V_x不是常数，那么就需要带着积分符号了：

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + \int V_x \dot{e_2} dt$$

这样的话要看V_x长什么样了，至少是一个时变的，一定非线性？书中说是非线性时变，不利于控制，我没看出来这里一定非线性了，V_x肯定带有t，如果那么积分至少出来关于时间的二次项、或者三角函数等等，确实是非线性的。为了简单起见，假设V_x是常量，这样可以得到一个LTI模型（线性时不变）便于控制系统设计求解。

再者，LTI系统可以用一个LPV系统（**线性变参数系统**（Linear parameter-varying System, LPV））去替换，具体怎么替换呢？（书本3.4节）

定义完e_1和e_2之后，往（0.31）的状态方程里面套就行了，左边用e_1和e_2替换，右边改一下，新的状态方程如下：

这样一来，方向控制问题就转化为了（0.45）的系统稳定的问题（始终记住以上模型是基于纵向速度V_x恒定情况下的模型），如果加上路面斜坡的因素，那么模型可以进一步写为：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f}{I_z} \end{bmatrix}\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix}\dot{\psi}_{des} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(\phi)$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & \dfrac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{m} & \dfrac{-2C_{\alpha f}\ell_f + 2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z V_x} & \dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z} & -\dfrac{2C_{\alpha f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

至此，运动学模型和动力学模型给出，一定要注意模型的假设条件。

apollo代码中应该是不考虑倾斜得情况得，也就是公式（0.45），写成简洁的形式就是说：

$$\dot{e}_{rr} = Ae_{rr} + Bu + C\dot{\psi}_{des}$$

这个形式还不是很符合LQR的形式，是因为多了尾巴的$C\dot{\psi}_{des}$，这里用LQR的时候，先不管$C\dot{\psi}_{des}$，因为它是用前馈来补偿的。

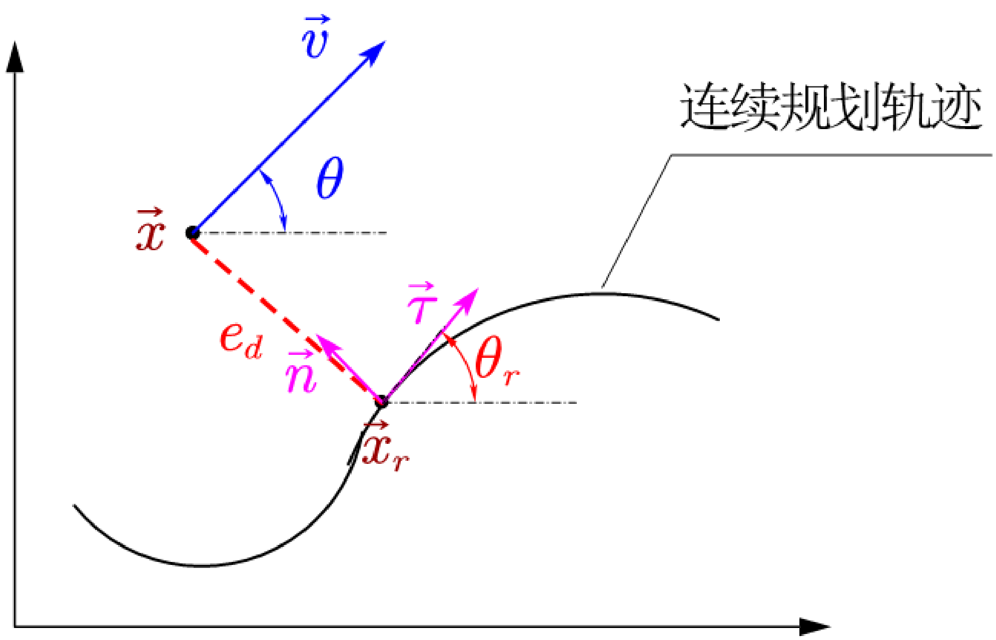
0.4 LQR算法

$$\dot{e}_{rr}=Ae_{rr}+Bu$$

1. 离散化：$\mathrm{err}(k+1)=\bar{A}\,\mathrm{err}(k)+\bar{B}u(k)$
2. 求解Riccati方程：$P=Q+\bar{A}^{\top}P\bar{A}-\bar{A}^{\top}P\bar{B}\left(R+\bar{B}^{\top}P\bar{B}\right)^{-1}\bar{B}^{\top}P\bar{A}$
3. 求解：$K=-\left(R+\bar{B}^{\top}P\bar{B}^{-1}\right)\bar{B}^{\top}P\bar{A}$
4. 最优控制输入：$u_k=-ke_{rr}(k)$

0.5 误差计算

假设汽车当前点为$\vec{x}$，其在连续期望轨迹上的投影点为$\vec{x}_r$。误差如下图所示：



在连续条件下，投影点即为目标点，误差计算公式如下：

$$e_d=\left(\vec{x}-\overrightarrow{x_r}\right)\cdot\overrightarrow{n_y}\quad(05.1)$$

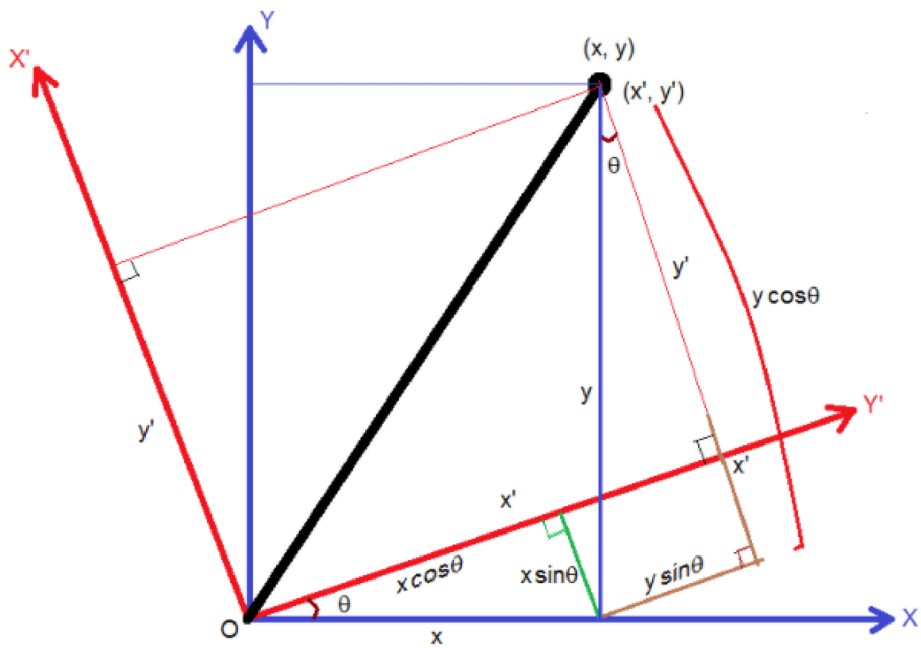
$$\dot{e_d}=|\vec{v}|\sin\left(\theta-\overrightarrow{\theta_r}\right)\quad(05.2)$$

$$e_{\varphi}=\varphi-\theta_r\quad(05.3)$$

$$\dot{e_{\varphi}}=\dot{\varphi}-k\dot{s}\quad(05.4)$$

0.6 二维坐标系旋转变换

在系统计算中，不可避免地涉及到车体坐标系和大地坐标系下坐标的相互转换。对于平移变换来说，只需要简单的加减即可，因此主要讨论二维坐标系的旋转变换。



如图，直角坐标系旋转θ角度后，新旧坐标系变换公式为：

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) \\
y' &= -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta)
\end{aligned}
$$

所以二维坐标旋转变换矩阵为：

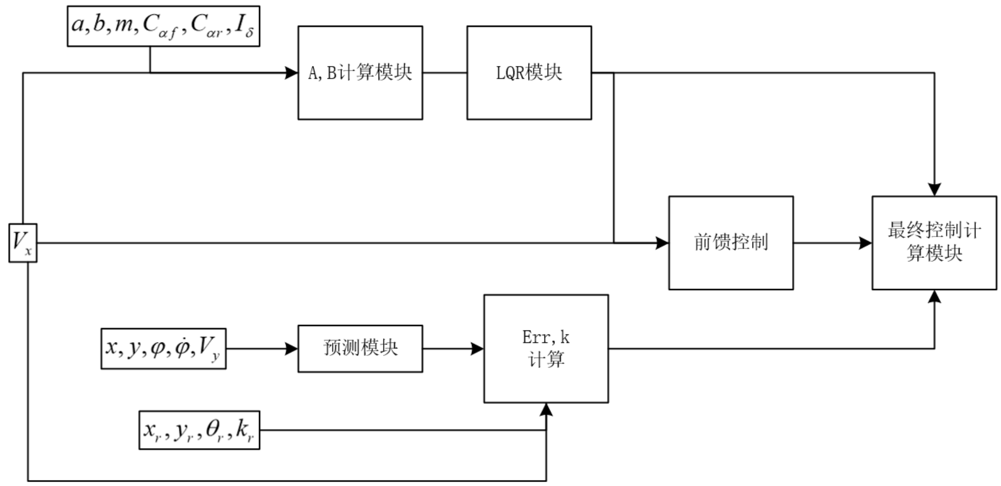
$$
B = \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{array}\right]
$$

假设存在平移T，则：

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \quad (06.1)
$$

1. 算法详细框架

给总图：横向控制算法总共包括6个模块。



💡 注：一下算法流程中小写代表大地坐标系，大写代表车体坐标系

1.1 A,B计算模块

输入：车体坐标的x轴速度，车体物理参数，包括前后轴距，车体侧偏刚度，转动惯量等。

输出：动力学模型中的A、B矩阵模块。

具体原理（过程）：具体推导看第一部分公式2.45.

1.2 LQR模块

输入：Q,R矩阵，动力学模型中的A,B矩阵

输出：增益矩阵K

具体原理（过程）：这里用的是离散LQR控制

1.3 前馈计算模块

输入：车体坐标的x轴速度

输出：控制的前馈项

具体原理（过程）：具体推导见基础知识部分公式2.45

1.4 误差计算模块

输入：

- 当前车体信息：$x, y, \phi, \dot{\phi}, V_x, V_y$

  目标点信息：x_r, y_r, θ_r, k_r

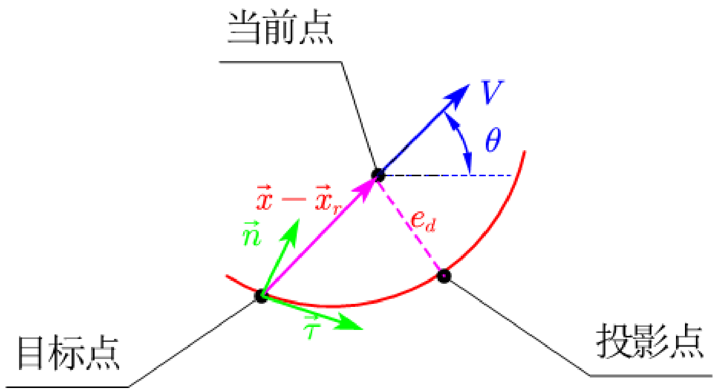
输出：

- 车在规划轨迹上投影点处曲率：k

- 误差：e_{rr}

具体原理（过程）：

由于在实际规划中，规划轨迹为离散点，不再是离散曲线，这也就意味这目标点与投影点不再等同，如下图所示：



以下为离散轨迹实际计算过程，主要是对公式05.1、05.2、05.3、05.4的改写。

- Step1:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} cos\theta_r \\ sin\theta_r \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -sin\theta_r \\ cos\theta_r \end{pmatrix}$$

- Step2:

$$d_{\vec{e_{rr}}} = \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{pmatrix}$$

- Step3:

$$e_d = \vec{n}^T \cdot d_{\vec{e_{rr}}}$$

- Step4:

$$e_s = \vec{\tau}^T \cdot d_{\vec{e_{rr}}}$$

- Step5:

$$\theta_r' = \theta_r + k_r \cdot e_s$$

- Step6:

$$\dot{e}_d = |\vec{V}| \sin(\theta - \theta_r \,|= V_y \cos(\varphi - \theta_r) + V_x \sin(\varphi - \theta_r)$$

- Step7:

$$e_\phi = \phi - \theta_r$$

- Step8:

$$\dot{s} = \frac{V\cos(\theta - \theta_r)}{1 - k_r \cdot e_d} = \frac{V_x \cos(\varphi - \theta_r) - V_y \sin(\varphi - \theta_r)}{1 - k_r e_d}$$

- Step9:

$$\dot{e_\phi} = \dot{\phi} - k_r \cdot \dot{s}$$

- Step10:

$$k = k_r$$

最终，输出$e_{rr} = [e_d, \dot{e_d}, e_\phi, \dot{e_\phi}]$，道路曲率 k

1.5 当前目标计算模块

💡 注：小写代表大地坐标系，大写代表车体坐标系

输入：

- 前瞻时间：t
- 当前车体信息：
  - v_x：大地坐标系下x方向速度
  - v_y：大地坐标系下y方向速度
  - x_0：大地坐标系下汽车x坐标
  - y_0：大地坐标系下汽车y坐标
  - ϕ：yaw
- 车道线信息：
  - id_1: $y_1 = c_0^1 + c_1^1 x + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3$
  - id_2: $y_1 = c_0^2 + c_1^2 x + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3$

输出：

目标点信息（x_r, y_r, θ_r, k_r）

具体原理（过程）：

坐标系转换见公式05.1

- 计算车体坐标系下车速：V_x, V_y

$$V_x = v_x \times cos\phi + v_y \times sin\phi$$

$$V_y = v_y \times cos\phi - v_x \times sin\phi$$

- 计算前瞻距离：D_x, D_y

$$D_x = V_x \times t$$

$$D_y = 0.5 \times (c_0^1 + c_0^2) + 0.5 \times (c_1^1 + c_1^2) \times D_x + 0.5 \times (c_2^1 + c_2^2) \times (D_x)^2 + 0.5 \times (c_3^1 + c_3^2) \times (D_x)^3$$

- 计算x_r, y_r:

$$x_r = D_x \times cos\phi - D_y \times sin\phi + D_x$$

$$y_r = D_y \times cos\phi + D_x \times sin\phi + D_y$$

- 计算θ_t：利用对中心曲线求导

$$\theta_r = \phi + atan(0.5 \times (c_1^1 + c_1^2) + (c_2^1 + c_2^2) \times D_x + 3 \times (c_3^1 + c_3^2) \times (D_x)^2)$$

- 计算中心线对应半径：R_m

$$R_l = \frac{1}{2 \times c_2^1}$$

$$R_r = \frac{1}{2 \times c_2^2}$$

$$R_m = 0.5 \times (R_l + R_r)$$

- 计算k_t

$$k_r = \frac{1}{R_m}$$

1.6 最终输出

输入：增益k，前馈量，误差

输出：输出控制量u

具体原理（过程）：$u = -ke_{rr} + \delta_f$

2. 注意事项

2.1 目标点计算

- 全局误差容易计算反，做好二维的坐标变换

- 目标点和全局坐标X轴的夹角theta，范围是【0-2pi】，theta的计算，为什么要往前看呢？直接算就行了。theta = yaw + atan(c1)
- 预测模块时间取0.1，之前应该取大了

2.2 误差计算

- 误差计算当中的vx和vy是车辆坐标系下的速度
- 航向角误差的导数的计算，目前是差分

2.3 前向控制

注意车轮转角和方向盘转角，加一个简单的闭环

2.4 LQR

Q和R矩阵的取值，之前比较小，取的Q = [1,1,1,1], R = 10

- R越大，越平滑，但是可能跟踪效果一般
- Q越大，跟踪效果越好，但是越不平滑